Extremale Graphentheorie – Übungsblatt 1
Wintersemester 2019/20
Dr. Christian Reiher, Bjarne Schülke

5. Bei einem Wettkampf im Mühle Spielen traten $n \geqslant 4$ Teilnehmer an. Es spielte jeder einmal gegen jeden anderen und kein Spiel ging unentschieden aus. Außerdem stellte sich heraus, dass es keine vier Spieler gab, von denen erstens einer von den drei anderen besiegt wurde und gleichzeitig zweitens keiner unter den übrigen dreien die beiden anderen besiegte. Für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ bezeichne a_i die Anzahl der Siege und b_i die Anzahl der Niederlagen des i^{ten} Spielers, wobei die Spieler irgendwie durchnummeriert seien.

   Man beweise, dass
   $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^3 \geqslant 0\,.$$

6. (a) Man beweise $\mathrm{ex}(n, C_4) \leqslant \frac{1}{2}(n^{3/2} + n)$ für alle $n \geqslant 4$.

   (b) Es seien p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Es sei G_p der Graph mit Eckenmenge $\mathbb{F}_p^2$, in dem zwei Ecken (a, b) und (x, y) genau dann benachbart sind, wenn $ax + by = 1$ gilt.

   Man zeige, dass G_p keinen C_4 enthält. Außerdem beweise man $e(G_p) \geqslant \frac{1}{2}(n^{3/2} - n)$, wobei $n = |G_p| = p^2$.

7. Man betrachte einen tripartiten Graphen G, dessen Eckenklassen alle dieselbe Größe n haben. Man beweise, dass G ein Dreieck enthält, falls $\delta(G) \geqslant n + 1$ gilt.

8. Für eine natürliche Zahl $n \geqslant 2$ setzen wir
   $$f(n) = \begin{cases} 2\binom{n/2}{3} & \text{wenn } n \text{ gerade ist,} \\ \frac{2}{3}k(k-1)(4k+1) & \text{wenn } n = 4k+1, \\ \frac{2}{3}k(k+1)(4k-1) & \text{wenn } n = 4k+3\,. \end{cases}$$

   Betrachte irgendeine Färbung der Kanten des vollständigen Graphen K_n mit den Farben *rot* und *grün*. Man beweise, dass es mindestens $f(n)$ einfarbige Dreiecke gibt.

9. Auf dem Rand eines Kreises sind 2^{500} Punkte markiert, an denen die Zahlen $1, 2, \dots, 2^{500}$ in irgendeiner Reihenfolge stehen. Man beweise, dass es 100 paarweise disjunkte Sehnen gibt, die jeweils 2 der Punkte verbinden und bei denen die Summen der Zahlen an ihren Endpunkten paarweise übereinstimmen.

10. Das Oktaeder O ist der vollständig tripartite 3-uniforme Hypergraph mit zwei Ecken in jeder Eckenklasse. Also hat O insgesamt 6 Ecken und 8 Tripel. Man beweise die Existenz einer Konstanten $C > 0$ mit
    $$\mathrm{ex}(n, O) \leqslant C\, n^{11/4}$$
    für alle $n \geqslant 6$.

- Abgabe von Aufgabe 8 (schriftlich, keine Gruppenarbeit) am Donnerstag den 7. November vor der Vorlesung
- Eintragung zu den Aufgabe 5, 6, 7, 9, 10 bis Freitag den 8. November, 12:00 Uhr unter https://is.gd/7arJ0y
- Diskussion am Freitag, den 8. November, 12:15 Uhr, Geom 432

Hinweise

5. Man kann sich die Situation als Turnier, d.h. als vollständigen gerichteten Graphen vorstellen. Der Term in der letzten Zeile lässt sich so umformen, dass nur noch Anzahlen von Teilgraphen auf höchstens vier Ecken vorkommen. Damit lässt sich die merkwürdige Voraussetzung ins Spiel bringen.

6. Bei Teil (a) kann man wie im Beweis des Satzes von Kövari, Sós und Turán vorgehen.

7. Was würde man machen, wenn alle Ecken genau den Grad $n + 1$ haben?

8. Man kann wieder anfangen, Konfigurationen zu zählen.

9. Das ist eine kuriose Anwendung von Satz 1.6.

10. Der Plan aus §2.4 funktioniert hier auch.